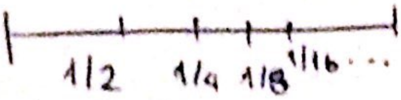
ΣΕΙΡΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ



$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \dots = 1$

Μπορούμε να αθροίσουμε άπειρο το πλήθος όρους;

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών.
Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ θέτουμε: $S_n = a_1 + \dots + a_n \left(= \sum_{k=1}^{n} a_k\right)$

[Δηλ. $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ κ.τ.λ.]

Το σύμβολο $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ είναι η σειρά με κ-οστό όρο a_k.

Ο αριθμός $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ονομάζεται n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς.

▶ Αν η ακολουθία $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει $\lim S_n = S$ για κάποιο $S\in\mathbb{R}$, γράφουμε $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$ και λέμε ότι η σειρά συγκλίνει στο S. Ο αριθμός S λέγεται και άθροισμα της σειράς.

▶ Αν η S_n τείνει στο $+\infty$ γράφουμε $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$ και λέμε ότι η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

▶ Αν η S_n τείνει στο $-\infty$ γράφουμε $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty$ και λέμε ότι η σειρά αποκλίνει στο $-\infty$.

▶ Αν η S_n δε συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό, τότε λέμε ότι η σειρά αποκλίνει.

Παρατήρηση: Πολλές φορές μας ενδιαφέρουν αθροίσματα της μορφής $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ή αθροίσματα $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$, $m \geq 2$.

Για την πρώτη περίπτωση έχουμε 2 τρόπους.

1ος τρόπος: $S_1 = a_0$, $S_2 = a_0 + a_1$, $S_3 = a_0 + a_1 + a_2$ κ.τ.λ.

2ος τρόπος: $S_1 = a_0 + a_1$, $S_2 = a_0 + a_1 + a_2$, $S_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ κ.τ.λ.

Πρόταση: Αν $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = t$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε, $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda s + \mu t$ (1)

Απόδειξη:

Θέτουμε: $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$t_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$

$u_n = (\lambda a_1 + \mu b_1) + \dots + (\lambda a_n + \mu b_n)$

Παρατηρούμε ότι $u_n = \lambda s_n + \mu t_n$. Εφόσον ξέρω $s_n \to s$ και $t_n \to t$ καθώς και $\lambda s_n \to \lambda s$ και $\mu t_n \to \mu t$, θα ισχύει $u_n \to \lambda s + \mu t$. Επομένως, ισχύει η (1).

Πρόταση:

(α) Αν αφαιρέσουμε πεπερασμένο πλήθος αρχικών όρων μιας σειράς, δεν επηρεάζεται η σύγκλιση ή η απόκλιση της.

(β) Αν μεταβάλλουμε πεπερασμένο πλήθος όρων μιας σειράς, δεν επηρεάζεται η σύγκλιση ή η απόκλιση της.

Απόδειξη:

(α) Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Λέγοντας ότι αφαιρούμε τους όρους $a_1, \dots, a_{m-1}$ της σειράς σημαίνει ότι θεωρούμε τη σειρά $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$. Θέτουμε $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ και $t_n = \sum_{k=1}^{n} a_{m-1+k}$.

$(t_1 = a_m, t_2 = a_{m+1}, \dots)$.

Για $n \geq m$: $s_n = a_1 + \dots + a_{m-1} + \underbrace{a_m + \dots + a_n}_{t_n}$

Άρα: $s_n = \underbrace{a_1 + \dots + a_{m-1}}_{\text{σταθερά}} + t_n$

Έτσι, η $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει η $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Παρατήρηση: Αν $s_n \to s$ (δηλαδή $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$) και $t_n \to t$ (δηλαδή $\sum_{k=m}^{\infty} a_k = t$). Τότε, $s = (a_1 + \dots + a_{m-1}) + t$ (δηλαδή $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = (a_1 + \dots + a_{m-1}) + \sum_{k=m}^{\infty} a_k$).

(β) Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Αλλάζοντας πεπερασμένο πλήθος όρων της σειράς, σημαίνει ότι θεωρώ μια νέα σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ώστε να υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $a_k = b_k$ $\forall k \geq n$. Αν παραλείψουμε τους $m-1$ πρώτους όρους των δύο σειρών, προκύπτει η ίδια σειρά. Το συμπέρασμα προκύπτει από το (α).

Πρόταση: Αν μια σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η $a_n \to 0$ (το αντίστροφο δεν ισχύει όπως θα δούμε παρακάτω σε παραδείγματα).

Απόδειξη:

Αν $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$ και $s_n \to s$ για κάποιο $s \in \mathbb{R}$. Παρατηρώ, πως $\forall n \in \mathbb{N}$:

$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n$. Δηλαδή, $a_n = s_n - s_{n-1}$.

$S_n \to S$ και $S_{n-1} \to S$. Άρα, $a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$.

Σημείωση!!! Η πρόταση χρησιμοποιείται ως αρνητικό κριτήριο για τη σύγκλιση μιας σειράς. Δηλαδή, ως κριτήριο απόκλισης. Αν $a_n \not\to 0$ τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

Πρόταση: Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ είναι συγκλίνουσα, τότε $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0$ να ισχύει $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| < \varepsilon$.

Απόδειξη:
Αν $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$ και θέτουμε $b_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ έχουμε $b_n = S - S_n$ (όπου $S_n = a_1 + \dots + a_n$)

Εφόσον $S_n \to S$ προκύπτει ότι $S - S_n \to 0$ δηλαδή $b_n \to 0$.
Άρα $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0$ $|b_n| < \varepsilon$ δηλαδή $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| < \varepsilon$.

Παραδείγματα:

α) $a_k = (-1)^{k+1}$ $k \in \mathbb{N}$

$S_1 = a_1 = 1$
$S_2 = a_1 + a_2 = 0$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1$
$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$
κ.τ.λ.

Γενικά, $S_n = \begin{cases} 1, & \text{περιττός} \\ 0, & \text{άρτιος} \end{cases}$

$S_{2n-1} = 1 \to 1$.
$S_{2n} = 0 \to 0$

Άρα, η (S_n) δεν συγκλίνει, δηλαδή η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

[Εναλλακτικά, εφόσον $(-1)^{k+1} \not\to 0$, συμπεραίνουμε πως η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει]

β) Η γεωμετρική σειρά με λόγο λ.

$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k$ $\quad a_k = \lambda^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$S_n = 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^n$

Παρατηρούμε ότι
- αν $\lambda \neq 1$ $\quad S_n = \dfrac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1}$
- αν $\lambda = 1$ $\quad S_n = n + 1$.

β1) Αν $|\lambda| \geq 1$ ώστε $\lambda^k \not\to 0$, άρα η S_n αποκλίνει.

β2) $|\lambda| < 1$ τότε η $S_n = \dfrac{1 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda} \to \dfrac{1}{1-\lambda}$

Δηλαδή $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k = \dfrac{1}{1-\lambda}$ όταν $|\lambda| < 1$.

[Γενικότερα, αν έχω μια γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο a_1 και λόγο λ,
οπότε $a_n = a_1 \cdot \lambda^{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$
αν $|\lambda| < 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_k = \dfrac{a_1}{1-\lambda}$.]

γ) Τηλεσκοπικές σειρές.

Ονομάζονται σειρές τις οποίες $a_k = b_k - b_{k+1}$ για κάποια γνωστή σειρά b_k

Τότε, $S_n = a_1 + \dots + a_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \dots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}$

Έτσι, αν $b_n \to b$ για κάποιο $b \in \mathbb{R}$, τότε $S_n \to b_1 - b$, δηλαδή $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = b_1 - b$.

Π.χ. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ δηλαδή $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$

Παρατηρούμε ότι: $a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$$

Επομένως, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

δ) Η αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

Απόδειξη:

Θέτουμε $a_k = \frac{1}{k}$. $S_n = a_1 + \dots + a_n$

Παρατηρούμε $\forall n \in \mathbb{N}$

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n\text{-φορές}} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Αν η σειρά συγκλίνει, δηλαδή ισχύει $S_n \to S$ για κάποιο $S \in \mathbb{R}$.

Τότε $S_{2n} \to S$ (ως υπακολουθία της S_n).

Άρα, $S_{2n} - S_n \to S - S = 0$, όμως $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$ $\forall n$. Άτοπο!

Παρατήρηση: $\frac{1}{k} \to 0$ όμως $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

Θεώρημα: (Κριτήριο Cauchy)

Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ μια σειρά. Η σειρά είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n > m \geq n_0$ να ισχύει $\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| = |a_{m+1} + \dots + a_n|$$

Απόδειξη:

Θέτουμε $S_n = a_1 + \dots + a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν η S_n συγκλίνει που ισχύει αν και μόνο αν η S_n είναι ακολουθία Cauchy $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n > m \geq n_0$: $|S_n - S_m| < \varepsilon$.

όμως $S_n - S_m = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_m) = a_{m+1} + \dots + a_n = \sum_{k=m+1}^{n} a_k$.

• Σειρές με μη αρνητικούς όρους, ονομάζονται οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ώστε $a_k \geq 0$ $\forall k$.

Παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι αύξουσα.

Πράγματι, $S_{n+1} = a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$ επειδή $a_{n+1} \geq 0$
Δηλαδή $S_{n+1} \geq S_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Θεώρημα: Έστω $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ακολουθία με $a_k \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$
Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν η ακολουθία (S_n) των μερικών αθροισμάτων είναι άνω φραγμένη. Αν η (S_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$.

Απόδειξη:
Η (S_n) είναι αύξουσα. Αν είναι φραγμένη, συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό s, άρα $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$. Αν δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $S_n \to +\infty$, δηλαδή $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$.

Παράδειγμα: Για τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ $\left(\frac{1}{k} > 0\right)$ είδαμε ότι η σειρά αποκλίνει, άρα $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.
Μπορούμε να δείξουμε και αλλιώς ότι $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

Θέτουμε $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Είδαμε νωρίτερα ότι $S_{2n} - S_n \geq 1/2 \ \forall n$.

Ισχυρισμός: $S_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \ \forall n$

Απόδειξη: (Με επαγωγή)
Για $n=1$ $S_2 = 1 + \frac{1}{2}$ ισχύει ως ισότητα.
Υποθέτουμε ότι $S_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$
Τότε, $S_{2^{n+1}} = S_{2^{n+1}} - S_{2^n} + S_{2^n} = (S_{2\cdot 2^n} - S_{2^n}) + S_{2^n} \geq 1/2 + \left(1 + \frac{n}{2}\right) = 1 + \frac{n+1}{2}$
Αποδείχθηκε.

Επειδή $S_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \ \forall n$ και $1 + \frac{n}{2} \to +\infty$, προκύπτει ότι $S_{2^n} \to +\infty$.

Επειδή η S_n είναι αύξουσα και έχει μια υπακολουθία που τείνει στο $+\infty$, συμπεραίνουμε ότι $S_n \to +\infty$.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ με $a_k \geq 0$ και $a_{k+1} \leq a_k \ \forall k \in \mathbb{N}$

Θεώρημα: (Κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy)
Έστω (a_k) φθίνουσα με $a_k \to 0$ (οπότε $a_k \geq 0 \ \forall k$). Τότε, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, αν και μόνο αν, η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει.

Απόδειξη:
Υποθέτουμε, πρώτα, ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει. Τότε, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $t_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2^n}$ είναι άνω φραγμένη, άρα $\exists M > 0$ ώστε $t_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι ο αριθμός M είναι άνω φράγμα για τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Έστω $S_m = a_1 + \dots + a_m$ ένα τυχαίο μερικό άθροισμα.
Τότε, $\exists n \in \mathbb{N}$ ώστε $2^m \leq m \leq 2^{m+1}$

$$S_m = a_1 + a_2 + \dots + a_3 + \dots + a_{2^n} + a_{2^n+1} + \dots + a_m \overset{\text{διότι φθίνουσα}}{\leq} a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2^n} = t_n \leq M.$$

Άρα, η $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ είναι άνω φραγμένη.

Συνεπώς, αν $a_n \geq 0$ $\forall n$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Τότε, η $S_n = a_1 + \dots + a_n$ είναι φραγμένη, άρα $\exists M > 0$ ώστε $S_n \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Τότε, για την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων t_n της σειράς $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$t_n = a_1 + 2a_2 + \underline{2a_4} + \dots + 2^n a_{2^n} \leq 2a_1 + 2a_2 + (2a_3 + 2a_4) + (2a_5 + 2a_6 + 2a_7 + 2a_8) +$$

$$a_4 < a_3$$

$$+ \dots + (2a_{2^{n-1}+1} + 2a_{2^{n-1}+2} + \dots + 2a_{2^n}) \leq 2M$$

Άρα, η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει.